

Перевод с английского статьи "Analytical model for the approximation of hysteresis loop and its application to the scanning tunneling microscope" (R. V. Lapshin, Review of Scientific Instruments, volume 66, number 9, pages 4718-4730, 1995, свободный доступ на веб-сайтах <http://www.nanoworld.org/homepages/lapshin/publications.htm> и <http://www.niifp.ru/staff/lapshin/>)

## **Аналитическая модель для аппроксимации петли гистерезиса и её применение в сканирующем туннельном микроскопе**

Р. В. Лапшин

НИИ Микроэлектроники и нанотехнологии "Дельта", 105122, г. Москва, Щёлковское шоссе 2, Россия

В статье предложено новое модельное описание и составленная на его основе классификация типов наиболее часто встречающихся на практике петель гистерезиса. Выполнен анализ функции, аппроксимирующей петлю гистерезиса. Получены параметры и характеристики модели, имеющие важный физический смысл: коэрцитивная сила, остаточная поляризация, величина гистерезиса, спонтанная поляризация, индуцированные пьезокоэффициенты, величина насыщения, гистерезисные потери энергии за цикл. В работе показано, что для пьезоманипуляторов с определёнными типами петель гистерезиса не существует разницы в тепловыделении. Вычислены коэффициенты гармонической линеаризации и найдена гармонически линеаризованная передаточная функция гистерезисного звена. Определён тип петли гистерезиса, обладающий минимальным фазовым сдвигом. Усреднённая относительная погрешность аппроксимации моделью реальных петель гистерезиса составила 1.5...6%. Процедура извлечения параметров модели из экспериментальных зависимостей прилагается. В работе представлены основанные на выводах модели примеры компенсации искажений раstra в устройстве сканирования сканирующего туннельного микроскопа.

### **I. ВВЕДЕНИЕ**

Известен целый ряд физических явлений, закон изменения которых представляет собой замкнутую кривую, называемую петлёй гистерезиса. Среди них можно отметить: диэлектрический гистерезис (кривая поляризации  $P=f(E)$ ), магнитный гистерезис (кривая намагничивания  $B=f(H)$ ), упругий гистерезис (кривая деформации  $\varepsilon=f(F)$ ) и некоторые другие.

Несмотря на распространённость и важность этого явления, не существовало простого аналитического выражения, способного аппроксимировать его с достаточной степенью точности. Поэтому очень часто при анализе различных процессов и систем, в состав которых входят элементы, имеющие характеристику в виде петли гистерезиса, приходилось искать решение либо графическим способом, используя данные, полученные в эксперименте, либо аппроксимировать петлю отрезками прямых.<sup>1, 2</sup>

Помимо неудобства, связанного с использованием табличного представления функции, к недостаткам первого метода можно отнести низкую точность графических построений. К недостаткам второго – как низкую точность получаемого решения, обусловленную грубостью кусочно-линейной аппроксимации (конечно, при “умеренном” числе спрямляющих отрезков), так и неудобства, связанные с заданием функции на нескольких интервалах, поиском решения на нескольких интервалах, последующей “склежкой” решений на границах интервалов.

Существуют и другие методы аппроксимации петли гистерезиса как в классе полиномиальных моделей,<sup>2</sup> так и в классе интегральных операторов,<sup>3,4</sup> но их использование ограничивается либо высокой сложностью аппаратной реализации, либо большим временем вычисления.

Данная работа преследует две цели. Первая, дать описание предложенной модели, её свойств и характеристик. Часть работы, посвящённая этому, носит достаточно общий, универсальный характер, поскольку в ней рассматривается использование модели для анализа статических нелинейностей – петель гистерезиса различных типов и различной природы, встречающихся во многих научных приборах. Вторая, продемонстрировать способы и приёмы практического использования модельных представлений и выводов, полученных при описании модели, для нужд частной области, а именно, для описания и компенсации неидеальностей пьезокерамического манипулятора сканирующего туннельного микроскопа (СТМ):<sup>5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12</sup> нелинейности и неоднозначности статической характеристики, ползучести пьезокерамики, подверженности тепловым дрейфам.

## II. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

### А. Аналитическое выражение семейства кривых гистерезиса. Образование типов и их классификация

Будем описывать семейство петель гистерезиса с помощью следующего обобщённого трансцендентного уравнения, записанного в параметрической форме

ФОРМУЛА (1)

где  $a$  – координата точки расщепления;  $b_x, b_y$  – координаты точки насыщения;  $m, n$  – целые числа (см. Таблицу I);  $\alpha$  – действительный параметр ( $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$ ).

Знак плюс в формуле (1) соответствует кривой гистерезиса, точки насыщения которой расположены в I и III квадрантах (именно этот случай рассматривается далее), знак минус – во II и IV, таким образом, кривые, построенные со знаком плюс и со знаком минус, симметричны друг другу относительно оси  $ou$ .

В Таблице I представлена классификация типов петель гистерезиса, поддерживаемых аналитической моделью. Каждый тип имеет статус либо основного, либо производного. Основные типы – “Лист”, “Месяц” (см., например, работу 13), “Классический” (Рис. 1а, б, в), задаются значением коэффициента  $n$ , причём, величина  $m$ , а начиная с  $n > 3$ , и величина  $n$ , являющиеся степенями уравнения (1), определяют крутизну (кривые – I, II, III). Производные типы “Классический с наклоном”, “Двойная петля”, “Летучая мышь” (Рис. 1д, е, ф) образуются из основных или из других производных при помощи дополнительных операций.

Так, для получения кривой производного типа “Классический с наклоном” (Рис. 1д), касательная в точке перегиба нерасщеплённой петли которой составляет с  $ox$  угол  $\beta \neq \pi/2$ , произведём поворот системы координат по часовой стрелке на угол  $\theta = \pi/2 - \beta$ . Таким образом, используя известные формулы преобразования Декартовых прямоугольных координат при повороте осей,<sup>14</sup> получим

ФОРМУЛА (2)

где  $\bar{x}(\alpha)$ ,  $\bar{y}(\alpha)$  – координаты повернутой системы.

При повороте системы координат точка расщепления  $\pm a$  и точка насыщения  $\pm b$  изменяют своё положение относительно исходной системы, и, следовательно, необходимо предварительно исказить их координаты так, чтобы после поворота эти точки совпали с исходными. Для этого воспользуемся следующими формулами преобразований<sup>14</sup>

ФОРМУЛА (3)

и

ФОРМУЛА (4)

Подставляя полученные скорректированные значения постоянных расщепления  $\bar{a}_x$  и насыщения  $\bar{b}_x$ ,  $\bar{b}_y$  в (1) вместо значений  $a$ ,  $b_x$ ,  $b_y$ , получим выражения  $x(\alpha)$ ,  $y(\alpha)$ , необходимые для выполнения вычислений по формуле (2).

Для построения более сложных моделей петель гистерезиса, например, “Двойных петель” (Рис. 1е), представляющих собой композицию типа 1/3/4, моделирования процессов теплового дрейфа и ползучести, используется параллельный перенос системы прямоугольных координат на величину  $x_0$ ,  $y_0$ .<sup>14</sup> Причём,  $x_0$  – это напряжение смещения,<sup>5</sup> а для ползучести и теплового дрейфа величина  $y_0$  является некоторой функцией времени  $y_0 = f(t)$ .<sup>6, 7, 8, 9</sup> Таким образом, для сдвинутой кривой имеем

ФОРМУЛА (5)

где уравнения  $x(\alpha)$ ,  $y(\alpha)$  определяются типом основы композиции.

Для образования типа “Летучая мышь” (Рис. 1ф) достаточно просто взять модуль  $y(\alpha)$ .

При определении направления обхода петли гистерезиса принято<sup>1,2</sup> для систем с координатным запаздыванием, с движением по нижней половине кривой связывать неравенство  $dx/dt > 0$ , а с движением по верхней половине –  $dx/dt < 0$ . Получающееся направление при этом – направление против часовой стрелки. В системах с координатным опережением знаки в неравенствах следует поменять на обратные, в этом случае движение происходит по часовой стрелке. Для описываемой модели при её параметрическом задании удобнее за положительное направление движения по кривой (против часовой стрелки) взять возрастание параметра  $\alpha$ , а за отрицательное – его убывание.

Для нерасщеплённой петли гистерезиса ( $a=0$ ) легко перейти от параметрической записи к явному заданию функции

ФОРМУЛА (6)

Имея выражение (6), можно построить петли, вложенные в предельный цикл. Порядок действий при этом таков (см. Рис. 2): для выбранного  $b_x^*$  из интервала  $(-b_x, b_x)$  находим по формуле (6) значение  $b_y^*$ , лежащее на нерасщеплённой кривой. Затем, основываясь на предположении о том, что в первом приближении вложенные петли подобны предельному циклу, задаёмся величиной расщепления  $a^* = a b_x^* / b_x$  и, используя параметры  $m, n, \theta$  предельного цикла, строим кривую. В общем случае вместо (6) можно использовать любую “удобную” функцию, проходящую через точки  $\pm b$  и начало координат.

Для того чтобы проследить историю движения по петле гистерезиса необходимо выполнить следующие действия. Первое, определить момент, когда знак производной входного сигнала изменится (этот момент соответствует точке насыщения частного цикла). Зная значение параметра  $\alpha$  в этот момент, параметры  $\pm b_x^* = x(\alpha), \pm b_y^* = y(\alpha)$  могут быть вычислены. Затем, используя информацию о расположении частных циклов внутри предельного, определяем  $a^*$  и  $\theta^*$ . Наконец, присваивая параметру  $\alpha$  значение  $\pi k/2$ , где  $k=1, 3, 5, \dots$ , имеем в наличии все параметры необходимые для продолжения движения по новому циклу.

Начиная с  $m=3$  и  $n=1$  невозможно разрешить функцию (1) в явном виде  $y=f(x)$ , так как при этом получаются уравнения больше четвёртой степени. Однако, для обратной к (1) функции, образующейся простым обменом в ней местами  $x(\alpha)$  и  $y(\alpha)$

ФОРМУЛА (7)

и являющейся основой при построения системы компенсации гистерезиса, можно получить явную запись

ФОРМУЛА (8)

Учитывая то, что операции деления и извлечения квадратного корня трудно реализуемы аппаратно, требуют большого времени вычисления и не являются типичными в алгоритмах, построенных для цифрового процессора сигналов (ЦПС), а также учитывая удобство определения обратной функции и направления обхода по контуру петли, следует признать параметрическую форму записи (1) наиболее удобной и далее пользоваться в основном ею.

### **В. Анализ кривой. Коэрцитивная сила, остаточная и спонтанная поляризации диэлектрика, индуцированные пьезокоэффициенты, величина насыщения**

Функция (1), принятая за модель гистерезиса, является непрерывной нелинейной многозначной ограниченной функцией, определённой на отрезке  $[-b_x, b_x]$ . Так как для функции (1) справедливы равенства

ФОРМУЛА (9)

где  $k=1, 2, 3, \dots$ , то она является периодической с периодом  $2\pi$ . Благодаря свойству периодичности функции (1) применение модели оказывается особенно эффективным в случае циклических процессов, например, в развёртывающих системах (см. раздел III.A).

Найдём нули функции (1), для чего определим параметр  $\alpha$ , при котором  $y(\alpha)=0$ , то есть  $b_y \sin \alpha=0$ , откуда  $\alpha=\pi k$ . Подставляя полученное значение  $\alpha$  в  $x(\alpha)$ , находим  $x=\pm a$ . Отметим, что физический смысл нуля функции (1) – коэрцитивная сила.

Определим координаты точки  $\pm c$  – точки пересечения петли гистерезиса с осью  $ou$ , определяющей величину остаточной поляризации. Для чего запишем

ФОРМУЛА (10)

Для случая  $m=n$  получаем

ФОРМУЛА (11)

Величина гистерезиса  $H_y$  определяется как  $c/b_y 100\%$ . Используя выражение (11), её можно записать в следующем виде

ФОРМУЛА (12)

Отметим, что отношение  $b_x/a$  в выражении (12) есть не что иное, как  $100\%/H_x$ , где  $H_x$  – “гистерезис” по оси  $ox$ . Таким образом, получаем соотношение, связывающее величины  $H_y$  и  $H_x$  между собой ( $m=n$ )

ФОРМУЛА (13)

Найдём координату точки  $c'$  (см. Рис. 2), образованной пересечением оси  $ou$  и касательной  $bd$ , проведённой в точке насыщения нерасщеплённой кривой (6). Отметим, что точка  $c'$  определяет величину спонтанной поляризации диэлектрика. Уравнение прямой  $bd$  можно записать в виде  $y=kx+c'$ , где  $k=\tan \gamma$ . Производная  $k=dy/dx$  нерасщеплённой кривой (6) в точке  $x=b_x$  равна  $b_y/(nb_x)$ . Из выражения для прямой  $bd$  в

точке  $x=b_x$ ,  $y=b_y$ , принимая во внимание найденное значение  $k$ , величина  $c'$  определяется как

ФОРМУЛА (14)

Покажем (не строго), что функция (1) является нечётной (за исключением типа “Месяц”). По определению функция  $y=f(x)$  является нечётной, если  $f(-x)=-f(x)$ , тогда

ФОРМУЛА (15)

Используя свойства  $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ ,  $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ , нечётность  $m$  и  $n$ , проводя формальную замену параметра  $-\alpha$  на  $\zeta$ , а также учитывая, что знак перед параметром расщепления  $a$  в формуле (1) определяет только начальную точку и направление движения по кривой, и поэтому здесь может быть выбран отрицательным, получим

ФОРМУЛА (16)

Таким образом, правые части выражений в (16) в сравнении с правыми частями (1) не изменились, следовательно, функция является нечётной. Так как график нечётной функции симметричен относительно начала координат, то для полного задания функции достаточно иметь информацию о половине кривой. Свойство симметричности функции (1) позволяет, например, при оценивании точности аппроксимации (см. раздел II.Е), проводить расчёт на полуотрезке области определения.

Найдём первую и вторую производные функции (1), которые для функции, заданной через параметр, вычисляются как<sup>14</sup>

ФОРМУЛА (17)

и

ФОРМУЛА (18)

где  $\dot{x}(\alpha) = dx/d\alpha \neq 0$ ,  $\ddot{x}(\alpha) = d^2 x/d\alpha^2$ ,  $\dot{y}(\alpha) = dy/d\alpha$ ,  $\ddot{y}(\alpha) = d^2 y/d\alpha^2$  – первые и вторые производные по параметру  $\alpha$  функций  $x(\alpha)$  и  $y(\alpha)$ , соответственно. Для рассматриваемой функции

ФОРМУЛА (19)

ФОРМУЛА (20)

ФОРМУЛА (21)

ФОРМУЛА (22)

Первая производная согласно (17) определяется как

ФОРМУЛА (23)

а вторая согласно (18) после простых преобразований – как

ФОРМУЛА (24)

Выражение (23) позволяет для кривой гистерезиса в координатах перемещение-напряжённость электрического поля определить индуцированные пьезокоэффициенты, а для кривой  $B=f(H)$  – дифференциальную магнитную проницаемость для любой её точки.

Анализируя выражения (23), (24), можно показать, что для  $m=1$  функция (1) в точке  $(+b_x, +b_y)$  достигает максимального значения, а в точке  $(-b_x, -b_y)$  – минимального. Так как для всех  $m \neq 1$  нижняя и верхняя части петли гистерезиса (1) являются монотонно возрастающими функциями, то на краях области определения, то есть в точках  $\pm b_x$ , (1) принимает наибольшее  $+b_y$  и наименьшее  $-b_y$  значения. Таким образом, точки кривой (1) с координатами  $(\pm b_x, \pm b_y)$  являются точками насыщения петли гистерезиса.

### С. Площадь петли

Физически площадь петли гистерезиса характеризует тепловые потери, приводящие к нагреванию материала и, следовательно, определяющие его КПД. Для отыскания площади петли  $S$  вычислим следующий интеграл<sup>14</sup>

ФОРМУЛА (25)

тогда с учётом выражений (1), (19) и (21) можно записать

ФОРМУЛА (26)

Раскрывая скобки, группируя члены, используя разложение Муавра<sup>14</sup> функций  $\cos^{m+1}\alpha$  и  $\cos^{m-1}\alpha$  и представляя интеграл суммы в виде суммы интегралов, получим выражение для определения площади петли гистерезиса для нечётных  $n$

ФОРМУЛА (27)

где  $C_l^k = l!/[k!(l-k)!]$  – биномиальные коэффициенты. Таким образом, площадь петель гистерезиса “Лист” и “Классический” не зависит от величины насыщения по координате  $x$ , а определяется только величиной расщепления и величиной насыщения по координате  $y$ .

Поскольку в формулу (27), верную для нечётного  $n$ , сам коэффициент  $n$  не входит явно, то может быть сформулирована следующая теорема: количество тепла, выделенного в пьезоманипуляторе за один цикл, для одних и тех же значений  $m$ ,  $a$ ,  $b_y$  одно и тоже как для петель гистерезиса типа “Лист”, так и для “Классический”.

Так как площадь геометрической фигуры инвариантна к повороту, то, подставляя в формулу (27) вместо  $a$  и  $b_y$  соответствующие им скорректированные значения  $\bar{a}_x$  и  $\bar{b}_y$  из выражений (3) и (4), получим формулу для определения площади петли гистерезиса типа “Классический с наклоном”

ФОРМУЛА (28)

Рассматривая член, содержащий коэффициент  $m$  в формулах (27), (28), при различных значениях  $m$ , можно показать, что при фиксации остальных параметров модели выполняется неравенство  $S_{m=5} < S_{m=3} < S_{m=1}$ , что хорошо видно из Рис. 1а, с (кривые I, II, III). Поэтому, чем больше коэффициент  $m$ , тем меньше выделяемая в пьезоманипуляторе порция тепла.

Например, для  $m=n=3$  ( $\theta=0$ ) тепловые потери, определяемые площадью петли гистерезиса, составят  $S=3/4\pi ab_y$ . Отметим, что для значений  $a$  и  $b_y$  таких, что  $ab_y=4/(3\pi)$ , площадь петли гистерезиса  $S$  равна единице.

#### **D. Коэффициенты гармонической линейаризации. Гармонически линейаризованная передаточная функция гистерезисного звена**

Пусть линейная часть нелинейной системы с гистерезисом обладает свойством фильтра нижних частот, то есть без потерь пропускает первую гармонику и значительно ослабляет все остальные, образованные нелинейным элементом, при входном гармоническом воздействии  $x(\omega t)=A \sin(\omega t)$ . Тогда для анализа такой системы можно применить метод гармонической линейаризации, согласно которому гистерезисная характеристика  $y=f(x)$  представляется в виде<sup>1,2</sup>

ФОРМУЛА (29)

где

ФОРМУЛА (30)

– коэффициенты гармонической линейаризации ( $\alpha=\omega t$ );  $p$  – обозначает операцию дифференцирования ( $p=d/dt$ ).

Вычислим коэффициенты гармонической линейаризации  $q(A)$ ,  $\hat{q}(A)$  для обратной функции (7), которая, как легко видеть, хорошо согласуется с условиями нашей задачи: в ней входной гармонический сигнал  $x(\alpha)$  равен  $b_y \sin \alpha$ , а  $f(b_y \sin \alpha)$  равна  $a \cos^m \alpha + b_x \sin^n \alpha$  (здесь вместо амплитуды  $A$  используется обозначение  $b_y$ ). По формуле (30) имеем

ФОРМУЛА (31)

Решая интегралы (31) по аналогии с (26) для нечётных  $n$ , коэффициенты гармонической линейаризации обратной функции (7) определяются как

ФОРМУЛА (32)

В соответствии с формулой (29), линейаризованное уравнение обратной функции петли гистерезиса принимает вид

ФОРМУЛА (33)

а передаточная функция  $W^1(b_y, s)=Y(s)/X(s)$  записывается как

ФОРМУЛА (34)

Найдём теперь передаточную функцию  $W(b_x, s)=1/W^1(b_y, s)$  обратную к (34), которая является искомой гармонически линейаризованной передаточной функцией гистерезисного звена (1). Здесь следует обратить внимание на то, что теперь входной амплитудой будет являться не  $b_y$ , а  $b_x$ . Получаем

ФОРМУЛА (35)

При подстановке в (35)  $s=j\omega$  (где  $j$  – мнимая единица) получаем амплитудно-фазовую характеристику гистерезисного звена

ФОРМУЛА (36)

которая зависит только от амплитуды  $b_x$  и не зависит от частоты  $\omega$ . Так как  $W(b_x) = q(b_x) + j\hat{q}(b_x)$ , то из (36) следует

ФОРМУЛА (37)

– искомые коэффициенты гармонической линеаризации функции (1). В случае, когда  $m=n=3$ , коэффициенты (37) принимают вид:  $q(b_x) = 4b_x b_y / [3(a^2 + b_x^2)]$ ,  $\hat{q}(b_x) = -4ab_y / [3(a^2 + b_x^2)]$ .  
Графики коэффициентов  $q(b_x)$ ,  $\hat{q}(b_x)$  показаны на Рис. 3.

Коэффициент  $q(b_x)$  определяет крутизну наклона осредняющей прямой, причём, как видно из формулы (37), с увеличением амплитуды  $b_x$  входного гармонического сигнала  $q(b_x)$  стремится к 0, так как в этом случае нелинейность (1) претерпевает насыщение.

Из передаточной функции (36) можно определить амплитуду первой гармоники  $A(b_x) = |W(b_x)|$  как

ФОРМУЛА (38)

и её фазу  $\varphi(b_x) = \arg W(b_x)$  как

ФОРМУЛА (39)

Например, сдвиг фазы первой гармоники на выходе нелинейного элемента “Классический”, изображённого на Рис. 1с, кривая II, составляет  $-18.4^\circ$ .

Знак минус в выражении (37) для коэффициента  $\hat{q}(b_x)$ , стоящего при производной в формуле (29), а также знак минус в (39) указывают на то, что наличие элемента с гистерезисом приводит к отставанию по фазе выходного сигнала относительно входного. Фазовый сдвиг, как следует из (39), будет тем больше, чем шире петля гистерезиса (больше параметр расщепления  $a$ ).

Анализируя коэффициенты, зависящие от  $m$  и  $n$ , в выражении (39), можно показать, что имеет место следующая теорема: при одних и тех же значениях параметров  $m$ ,  $a$  и  $b_x$  минимальным фазовым сдвигом обладают петли гистерезиса типа “Лист”, при этом  $|\varphi_{m=5}| < |\varphi_{m=3}| < |\varphi_{m=1}|$ . Отметим здесь, что именно такой тип петли присущ пьезоманипуляторам СТМ (см. Рис. 4а и работы 5, 9, 10, 11, 12).

Располагая гармонически линеаризованной передаточной функцией (35) звена с гистерезисом, дальнейший анализ системы автоматического регулирования для определения её устойчивости, точности и качества переходного процесса следует проводить, пользуясь существующей теорией линейных систем.

## Е. Оценки погрешности аппроксимации

Погрешность аппроксимации экспериментальных характеристик петель гистерезиса будем оценивать, вычисляя следующие величины:

1. Максимальную абсолютную погрешность аппроксимации

ФОРМУЛА (40)

где  $y_m(x)$  – данные модели;  $y_e(x)$  – данные эксперимента.

2. Максимальную относительную погрешность аппроксимации

ФОРМУЛА (41)

где  $y_e^{\max} = b_y$  координата  $y$  точки насыщения экспериментальной кривой.

3. Усреднённую относительную погрешность аппроксимации

ФОРМУЛА (42)

4. Среднеквадратическую погрешность аппроксимации ( $\sigma$ )

ФОРМУЛА (43)

В Таблице II представлены результаты определения погрешности аппроксимации моделью реальных характеристик гистерезиса, для которых указан тип модели и её параметры.

## Ф. Процедура определения параметров модели по предельному циклу

Для построения модели необходимо извлечь из экспериментальной зависимости шесть параметров:  $a$ ,  $b_x$ ,  $b_y$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\theta$  по следующему алгоритму.

1. По виду кривой определяется её тип (см. Таблицу I). Если тип производный, то определяется основной тип, от которого он образован. Зная тип, имеем значение параметра  $n$  и вид уравнения, описывающего этот тип.
2. Если тип идентифицирован как “Классический с наклоном” или как производные от этого типа – “Двойная петля” или “Летучая мышь”, то по графику экспериментальной зависимости определяется угол  $\theta$ .
3. Если кривая в области точки насыщения ведёт себя так, как показано на Рис. 1а, б, с график I, то  $m=1$ , если как на графиках II, III того же рисунка, то  $m>1$ .
4. По экспериментальной зависимости определяется значение коэрцитивной силы  $a$ .
5. По экспериментальной зависимости определяются координаты точки насыщения  $b_x$ ,  $b_y$ , причём, если тип модели – “Лист”, то может быть вычислен угол  $\beta$ .
6. Если тип модели – “Двойная петля”, то по экспериментальной характеристике определяются величины смещений  $b_x$ ,  $b_y$ .
7. Варьируя значениями коэффициентов  $m$  (если только  $m \neq 1$ , см. пункт 3),  $n$  (если только  $n \neq 1$ , см. пункт 1) и, в малых пределах, величиной угла  $\theta$  (если только

Аналитическая модель для аппроксимации петли гистерезиса идентифицированный тип – не “Лист” или не “Месяц”), с помощью оценок раздела II.Е добиваются минимальной величины ошибки аппроксимации.

### III. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ

На Рис. 5 в общем виде показано включение элементов компенсации гистерезиса НСЕ в систему управления СТМ. Описываемая ниже система компенсации относится к классу систем без обратной связи, в ней НСЕ элементы представляют собой последовательные нелинейные корректирующие устройства, которые могут быть реализованы как аппаратно в аналоговом либо в цифровом виде, так и программно.

Во всех трёх способах реализации для компенсации гистерезиса будем использовать обратную к (1) функцию, основываясь на известном тождестве –  $f(f^{-1}(X)) \equiv X$  (-1 обозначает обратную функцию). В терминах описываемой здесь системы компенсации исходной функцией  $f$  является статическая характеристика пьезоманипулятора, аппроксимируемая с помощью формулы (1), обратной к ней функцией  $f^{-1}$  является функция (7), синтезируемая элементом НСЕ, а аргументом  $X$  обратной функции является входной сигнал управления, например, сигнал развёртки “XIn”, который предскажётся элементом НСЕ, пропускается через высоковольтный усилитель НВА и затем прикладывается к пьезоманипулятору. Таким образом, результирующее смещение манипулятора будет соответствовать входной функции развёртки.

#### А. Компенсация искажений раstra в устройстве развёртки СТМ

На Рис. 6а показана блок-схема устройства компенсации гистерезиса. Схема построена на аналоговых элементах и содержит: генератор синусоидальных колебаний GEN; канал умножителей MUL, производящий операцию возведения в степень  $m$  и  $n$  входного колебания  $\sin(\omega t)$ ; фазосдвигающий элемент PS, предназначенный для получения колебания  $\cos^m(\omega t)$  из  $\sin^m(\omega t)$  сдвигом последнего на четверть периода; операционные усилители AMP2, AMP3 с коэффициентами усиления  $K=a$ ,  $K=b_x$ , соответственно; суммирующий ОУ SUM, а также усилитель AMP1 с коэффициентом усиления  $K=b_y$ , компаратор COMP и устройство выборки и хранения AS. Последние три компонента схемы реализуют последовательным приближением функцию, которая устанавливает соответствие между входным сигналом развёртки “XIn” и параметром  $\alpha = \omega t$  (такое решение проще, так как позволяет не вычислять функцию  $\arcsin(X(t)/b_y)$  явно).

Схема фактически выполняет вычисление обратной функции (7), принцип её работы “прозрачен” и не требует пояснений. Укажем только, что устройство SCAN, формирующее развёртку, для обеспечения условия синфазности должно выработать в начале каждого полупериода развёртки сигнал “XStart”, который запускает ждущий генератор GEN таким образом, что последний в соответствии со знаком производной сигнала развёртки

генерирует нужную половину синусоиды (зондирующая частота генератора GEN много больше частоты сигнала развёртки  $X(t)$ ). Обратим внимание на то, что на Рис. 6а изображены не пилообразные, а треугольные импульсы развёртки, что указывает на работу без холостого хода.

Покажем теперь, как будет выглядеть схема НСЕ элемента для микроскопа с круговой развёрткой. Отметим, что круговая развёртка является более предпочтительной в сравнении со строчной, так как в этом случае конструкция X и Y манипуляторов становится симметричной, происходит равномерная загрузка манипуляторов во время работы, увеличивается плавность хода развёртки, а также появляются дополнительные возможности микроскопа, описанные в работе 17. К недостатку круговой развёртки следует отнести необходимость отображения точек полученного круга в привычное прямоугольное окно дисплея при визуализации.

Для получения круговой развёртки необходимо подать на X-манипулятор напряжение, изменяющееся по закону  $\sin(\omega t)$ , а на Y-манипулятор –  $\cos(\omega t)$ . Мысленно вместо треугольного напряжения (см. Рис. 6а) подадим напряжение, изменяющееся как  $X(t)=b_y \sin \alpha$ , где  $\alpha=\omega t$ . В этом случае хорошо видно, что цепочка устройств – усилитель AMP1, компаратор COMP и устройство выборки и хранения AS оказывается ненужной, и её можно удалить из схемы. Теперь вместо треугольного напряжения  $Y(t)$  подадим напряжение  $Y(t)=b_y \cos \alpha$  (структурно каналы по X и Y одинаковы). Так как функция косинуса опережает функцию синуса на  $\pi/2$ , то по формуле (7) можем записать:  $y(\alpha)=a \cos^m(\alpha+\pi/2)+b_x \sin^n(\alpha+\pi/2)$ , откуда получаем ещё одну запись для обратной функции

#### ФОРМУЛА (44)

которую можно использовать наряду с (7). Из последних рассуждений следует, что схема генерации круговой развёртки с одновременной компенсацией гистерезиса приобретает вид, представленный на Рис. 6б, где под SUB понимается ОУ, включённый по дифференциальной схеме. Сравнение рисунков 6а и 6б указывает на уменьшение аппаратных затрат при реализации круговой развёртки, отметим также то, что потребность в параметре  $b_y$  отпадает. Описанная здесь схема круговой развёртки служит основой при построении циклоидной и спиралевидной развёрток.

Представленные устройства компенсации гистерезиса являются простейшими и, вообще говоря, не позволяют работать с производными типами петель, разными форматами изображений поверхности, смещать кадр по полю сканирования и осуществлять векторный доступ в точку. Аппаратная реализация указанных возможностей может привести к значительному усложнению аппаратуры. Выходом из этого положения является построение цифровых систем или вычисление модели по программе.

Цифровую систему компенсации гистерезиса будем строить, используя структуры и выводы, полученные при синтезе аналоговой системы. Так для схем, изображённых на Рис. 6а, б, следует аналоговые умножители MUL и ОУ AMP1/2/3/4 заменить на цифровые умножители; суммирующий ОУ SUM и дифференцирующий ОУ SUB – на схемы АЛУ; устройство выборки и хранения AS – на стробируемый регистр, к выходу которого следует подключить ЦАП; генератор синусоидальных колебаний GEN – на схему ПЗУ с записанной в ней таблицей синуса; аналоговый компаратор COMP – на цифровой компаратор. К адресным входам ПЗУ следует подключить кольцевой счётчик. Функция фазосдвигающего звена PS выполняется посредством сдвига значения адреса, выдаваемого кольцевым счётчиком, так чтобы пропустить ровно четверть периода синуса в таблице ПЗУ.

При программной реализации модели функции  $\cos^m \alpha$ ,  $\sin^n \alpha$  хранятся в памяти данных компьютера в виде таблиц. Причём, пересчёт величины напряжения развёртки в соответствующее значение  $\alpha$  возможен как последовательным приближением (подобно работе цепочки устройств AMP1-COMP-AS), так и прямым преобразованием через таблицу арксинуса, также хранящуюся в памяти данных, либо прямым вычислением арксинуса, используя известное соотношение<sup>14</sup>

$$\arcsin \frac{f(t)}{b_y} = \int_0^t \frac{\partial f(t)}{\sqrt{b_y^2 - f(t)^2}}, \text{ где } f(t) \text{ – функция}$$

сканирования ( $|f(t)| < b_y$ ). Для полупериода треугольной развёртки  $f(t)$  равно  $kt$ , переходя от интеграла к сумме, получим

#### ФОРМУЛА (45)

где  $N$  – число отсчётов;  $\Delta t = t/N$  – дискрета времени.

Вычисление модели можно производить на универсальном процессоре, но, пожалуй, наиболее эффективно задача решается в системе, выполненной на основе ЦПС, так как для вычислений требуется характерная для его алгоритмов операция типа  $AB_i + C$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – действительные числа. Причём,  $A = a$ ,  $B_i = \cos^m \alpha_i$ ,  $C = DE_j + F$ , а  $D = b_x$ ,  $E_j = \sin^n \alpha_j$ ,  $F = 0$ . Индексы  $i$ ,  $j$  – адреса ячеек памяти, в которых хранятся затабулированные значения  $\cos^m \alpha_i$  и  $\sin^n \alpha_j$ , соответственно.

На Рис. 7 показана блок-схема цифрового устройства компенсации гистерезиса, реализованного аппаратно-программно. Устройство позволяет работать со всеми типами гистерезиса, в общем случае производить сканирование вдоль произвольной траектории и поэтому использовать любой тип развёртки. Устройство также позволяет осуществлять поворот окна сканирования вокруг оси  $oz$  (например для уменьшения муара), изменять размеры окна и смещать его по полю.

В схеме задействован кольцевой программируемый счётчик PCT2, генерирующий в темпе, определяемом тактовым сигналом “Clock” и коэффициентом деления “DC”, адрес

“Addr2” и сигнал чтения “Read2” для схемы двухпортового ОЗУ RAM, в которое записаны данные модели. С выхода ОЗУ код “MData2”, соответствующий предыскажённому текущему значению развёртывающего напряжения, поступает в ЦАП DAC, откуда, проходя через высоковольтный усилитель, подаётся на манипулятор. Другой порт ОЗУ предназначен для записи данных модели “MData1”, вычисляемых процессором микроЭВМ. Применение двухпортового ОЗУ позволяет совместить во времени вычисление модели и формирование управляющего сигнала для манипулятора и тем самым повысить быстродействие устройства.

Подсистема развёртки, построенная на основе двухпортового ОЗУ, обладает способностью легко трансформироваться из синхронной в асинхронную, для чего достаточно вместо сигнала “Clock” подать сигнал, указывающий на готовность данных в системе стабилизации туннельного зазора.<sup>18</sup> Кроме того, если последняя использует в качестве Z-буфера также двухпортовое ОЗУ, то для выборки очередной его ячейки памяти можно использовать сигнал “Addr2”, генерируемый счётчиком PCT2. Таким образом, просматривается хорошая взаимная схемотехническая увязка работы системы стабилизации туннельного зазора и системы генерации сигналов развёртки.

Следует отметить, что через определённое время работы в модели при использовании режимов сканирования, требующих частого изменения её параметров  $a$ ,  $b_x$ ,  $b_y$  (например, смена формата раstra, формируемого развёрткой), будет накоплена некоторая ошибка. В момент, когда она станет больше некоторого порога, определяемого допустимой ошибкой аппроксимации, необходимо произвести принудительную коррекцию: для модели – присвоением параметру  $\alpha$  значения  $\pi/2$ ; для пьезоэлемента – подачей напряжения насыщения и тем самым гарантированной установкой его в фиксированную точку предельной характеристики – точку насыщения.

#### IV. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рисунках 8а, с показано изображение участка поверхности тестового паттерна, полученное на СТМ при сканировании с холостым обратным ходом и без него, соответственно. В качестве тестового паттерна использовалась дифракционная решётка с периодом 0.3 мкм, покрытая золотом. Поскольку структура решётки изменяется только в одном направлении, а пьезоманипуляторы развёртки вносят гистерезисные искажения в двух направлениях, то для отображения этих искажений на получаемом изображении тест объект был установлен так, чтобы его полосы составили угол приблизительно 45° к оси X-манипулятора.

На полученных изображениях хорошо видны искажения тестового паттерна, выраженные в искривлении полос и изменении их ширины от полосы к полосе (Рис. 8а,

Аналитическая модель для аппроксимации петли гистерезиса (сравни с данными, приведёнными в работе 11), расщеплении полос и образовании двухсторонней гребенчатой структуры (Рис. 8с), а также в том, что параллельные полосы выглядят как расходящиеся (Рис. 8е, сравни с данными, приведёнными в работе 12).

На рисунках 8b, d показаны изображения того же участка поверхности, что и на рисунках 8а, с, соответственно, полученные с использованием системы компенсации гистерезиса, предложенной на Рис. 7 (параметры модели взяты из данных, представленных на Рис. 4а). Визуальное сравнение Рис. 8а и Рис. 8b (с и d) показывает, что нелинейные искажения, вызванные гистерезисом пьезокерамики манипуляторов развёртки СТМ, практически устранены.

Петли гистерезиса, у которых параметр  $m$  равен единице, имеют участок с отрицательной производной (см. Рис. 4d). Поведение пьезоманипулятора на этом участке подобно ползучести: достигнув точки  $e$  (параметр  $\alpha$ , соответствующий этой точке, можно найти путём приравнивания знаменателя выражения (23) к нулю), напряжение начинает уменьшаться, но перемещение ещё некоторое время увеличивается до тех пор, пока не будет достигнута точка  $b$ . Из работ 7, 8 известно, что ползучесть вызывает искажения на краях изображения (например, у прямых линий появляются завитки), то есть там, где ход развёртки меняет направление на противоположное. Аналогичного характера искажения возникают и при использовании пьезоманипулятора с указанной петлёй гистерезиса. Таким образом, результирующая картина включает наложенные друг на друга искажения, вызванные ползучестью пьезокерамики и её гистерезисом.

## V. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предложенная аппроксимирующая модель относится к классу моделей реального времени. Она позволяет компенсировать неидеальности пьезоманипулятора СТМ, такие как нелинейность и неоднозначность, что даёт возможность избавиться от искажений раstra (см. Рис. 8 и работы 10-12) особенно существенных на больших сканах; отказаться от холостого хода строчной развёртки и, таким образом, уменьшить время сканирования; осуществить режим прямого доступа в заданную точку. Причём, восстановление истинного изображения возможно посредством как предобработки, то есть предыскажением траектории развёртки, так и постобработки полученного искажённого изображения.

Как было показано в разделе II.C, количество тепла  $Q$ , выделяемое пьезоманипулятором за цикл гистерезиса  $t$  (определяется системным таймером или значением частоты развёртки), легко вычислить, например, по формуле (28). Величина  $Q$  и время  $t$  могут служить входными данными для некоторой модели, учитывающей протекание процессов теплообмена между элементами конструкции СТМ. Определив с

помощью такой модели изменение температуры манипулятора  $\Delta T$ , находим изменение длины  $\Delta l$  манипулятора по формуле

ФОРМУЛА (46)

где  $\beta$  – коэффициент теплового расширения [1/К];  $l$  – исходная длина манипулятора [м]. Вычисленный таким образом тепловой дрейф  $\Delta l$  можно скомпенсировать в устройстве развёртки соответствующим смещением окна сканирования. Компенсация теплового дрейфа особенно важна для устройства развёртки, так как в нём отсутствует какая-либо активная система слежения. Отметим, что тепловые процессы, происходящие в СТМ, сильно зависят от конструктивных особенностей микроскопа и используемых материалов,<sup>9</sup> имеют достаточно сложный характер и поэтому заслуживают специального исследования, выходящего за рамки данной статьи.

Основное достоинство модели – простота. Параметры модели не вычисляются, а берутся прямо из экспериментальной кривой; не вычисляется также и обратная функция. Параметры модели имеют ясный физический смысл и простую геометрическую интерпретацию. Отличительной чертой модели является возможность сравнения различных типов петель гистерезиса между собой (см. теоремы в разделах II.C, II.D).

Недостатком модели следует считать ограничение на достижимую точность аппроксимации, то есть зависимость последней от конкретного вида кривой гистерезиса. По-видимому, возможно решение и обратной задачи, когда путём изменения технологических параметров: химического состава, условий спекания/охлаждения, механических воздействий и т. д. к выбранной модели производится подгонка кривой гистерезиса пьезокерамики.

При помощи данной модели возможна линеаризация контура системы стабилизации туннельного зазора СТМ методами сходными с методами, изложенными в разделе III.A, что позволяет предотвратить возникновение автоколебаний и избавиться от искажений в направлении оси  $Z$ ,<sup>8</sup> хотя наиболее приемлемым решением здесь следует считать способ, использованный в работе 18.

Для измерения частотной характеристики  $Z$ -манипуляторов часто используют вспомогательный пьезоэлемент, который должен модулировать туннельный зазор по гармоническому закону. При таком способе, если к вспомогательному пьезоэлементу прикладывается синусоидальное напряжение, то закон его механического перемещения из-за наличия гистерезиса неполностью соответствует синусоидальному. Предложенная модель позволяет увеличить точность измерений. Для этого на вспомогательный пьезоэлемент нужно подавать сигнал  $x(\alpha)$ , согласно формуле (1), и тогда выходной сигнал  $y(\alpha)$  будет являться гармонической функцией.

Использование описанной модели может быть полезно в задачах имитационного моделирования, а также при выполнении инженерных расчётов нелинейных систем управления и регулирования, содержащих звенья с гистерезисной характеристикой.

Автор выражает благодарность О. Э. Ляпину, В. В. Ефремову, О. Д. Кнабу, В. Н. Яковлеву и О. В. Объедкову за полезные советы и обсуждение.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Кроме гладких петель, данная модель способна описывать также и кусочно-линейные петли (см. книги 1, 2). Для получения набора кусочно-линейных примитивов следует в формуле (1) вместо базовых функций  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  использовать кусочно-линейные, например трапецеидальные импульсы единичной амплитуды

### ФОРМУЛА (А1)

где подстрочные символы  $s$  и  $c$  указывают на синус и косинус, соответственно;  $d$  и  $D$  – малое и большое основания трапеции, соответственно;  $T=d+D$  – период импульсов;  $\text{rect}_1(\alpha, i)=1(\alpha+(D-d)/4-iT/2)-1(\alpha-(D-d)/4-iT/2)$  и  $\text{rect}_2(\alpha, i)=1(\alpha-(D-d)/4-iT/2)-1(\alpha-(D-d)/4-d-iT/2)$  –  $i$ -ые прямоугольные импульсы;  $1(\alpha, i)$  –  $i$ -ая функция ступеньки. Треугольные импульсы ( $\text{tri}_s(\alpha)=\lim_{d \rightarrow 0} \text{trp}_s(\alpha)$  и  $\text{tri}_c(\alpha)=\text{tri}_s(\alpha+T/4)$ ) или прямоугольные ( $\text{rect}_s(\alpha)=\lim_{d \rightarrow D} \text{trp}_s(\alpha)$  и  $\text{rect}_c(\alpha)=\text{rect}_s(\alpha+T/4)$ ) могут также использоваться для этих целей.

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

(в английской версии отсутствует, приложение было удалено при сокращении статьи)

При подстановке  $\alpha = \pi k/2$ , где  $k=1, 3, 5, \dots$ , в выражении (23) для всех случаев, когда  $m \neq 1$ , возникает неопределенность типа  $0/0$ , для раскрытия которой необходимо косинусы и синусы, входящие в (23), представить в виде главных степенных членов разложения в ряд Тейлора, а именно:  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2!$ ;  $\sin \alpha \approx \alpha - \alpha^3/3!$  и затем, для выбранного  $m$  и  $n$ , отбрасывая бесконечно малые более высокого порядка, вычислить предел  $\lim_{\alpha \rightarrow \pi k/2} dy/dx$ , который определяет угол наклона касательной в точке насыщения. Например, для случая  $m=n=3$  указанный выше предел равен  $768b_y/(\pi^6 b_x)$ .

### Подписи к рисункам и таблицам

Рис. 1. Типы петель гистерезиса, поддерживаемые моделью: (а) “Лист” ( $a=0.2$ ;  $b_x=0.6$ ;  $b_y=0.8$ ;  $m=1, 3, 5$ ;  $n=1$ ;  $\theta=0^\circ$ ); (б) “Месяц” ( $a=0.2$ ;  $b_x=0.6$ ;  $b_y=0.8$ ;  $m=1, 3, 5$ ;  $n=2$ ;  $\theta=0^\circ$ ); (в) “Классический” ( $a=0.2$ ;  $b_x=0.6$ ;  $b_y=0.8$ ;  $m=1, 3, 5$ ;  $n=3$ ;  $\theta=0^\circ$ ); (д) “Классический с наклоном” ( $a=0.2$ ;  $b_x=0.6$ ;  $b_y=0.8$ ;  $m=3$ ;  $n=3$ ;  $\theta=15^\circ$ ); (е) “Двойная петля” ( $a=0.1$ ;  $b_x=0.4$ ;  $b_y=0.4$ ;  $m=3$ ;  $n=3$ ;  $\theta=15^\circ$ ); (ф) “Летучая мышь” ( $a=0.2$ ;  $b_x=0.6$ ;  $b_y=0.8$ ;  $m=3$ ;  $n=3$ ;  $\theta=15^\circ$ ).

Рис. 2. Вложенные петли. Определение величины спонтанной поляризации ( $a=0.2$ ;  $b_x=0.6$ ;  $b_y=0.8$ ;  $m=1$ ;  $n=3$ ;  $b_x^*=0.3$ ).

Рис. 3. Графики зависимости коэффициентов гармонической линейаризации  $q(b_x)$ ,  $\hat{q}(b_x)$  нелинейного звена с гистерезисом от амплитуды  $b_x$  ( $a=0.2$ ;  $b_y=0.8$ ;  $m=n=3$ ).

Рис. 4. Качество аппроксимации: I – данные модели; II – экспериментальные данные. (а) Перемещение ЦТС X, Y пьезоманипуляторов СТМ в зависимости от приложенного напряжения (“Лист”;  $a=32.6$ ;  $b_x=300$ ;  $b_y=955$ ;  $m=3$ ;  $n=1$ ;  $\beta=72.6^\circ$ ;  $H_y \approx 11\%$ ;  $\langle \delta \rangle = 1.5\%$ ); (б) Поляризация керамики в зависимости от напряжённости электрического поля (см. работу 15, “Классический с наклоном”;  $a=54$ ;  $b_x=130$ ;  $b_y=36.4$ ;  $m=1$ ;  $n=3$ ;  $\theta=27.7^\circ$ ;  $\langle \delta \rangle = 6\%$ ); (в) Поляризация керамики в зависимости от напряжённости электрического поля (см. работу 16, “Классический с наклоном”;  $a=90$ ;  $b_x=340$ ;  $b_y=39.6$ ;  $m=5$ ;  $n=3$ ;  $\theta=30^\circ$ ;  $\langle \delta \rangle = 4.1\%$ ); (д) Поляризация керамики в зависимости от напряжённости электрического поля (см. работу 16, “Лист”;  $a=180$ ;  $b_x=195$ ;  $b_y=63.8$ ;  $m=1$ ;  $n=1$ ;  $\beta=18.1^\circ$ ;  $\langle \delta \rangle = 3.9\%$ ); (е) Поляризация керамики в зависимости от напряжённости электрического поля (см. работу 16, “Классический с наклоном”;  $a=122.5$ ;  $b_x=341$ ;  $b_y=23.2$ ;  $m=1$ ;  $n=3$ ;  $\theta=14^\circ$ ;  $\langle \delta \rangle = 2.7\%$ ).

Рис. 5. Включение элементов компенсации гистерезиса НСЕ в систему управления СТМ.

Рис. 6. Блок-схема аналогового устройства компенсации гистерезиса для случая: (а) строчной развёртки; (б) круговой развёртки.

Рис. 7. Блок-схема цифрового устройства компенсации гистерезиса (аппаратно-программная реализация).

Рис. 8. СТМ-скан одного и того же участка поверхности тестового паттерна (дифракционная решетка с периодом 0.3 мкм, покрытая золотом, размер области

Аналитическая модель для аппроксимации петли гистерезиса ( $1 \times 1$ ) мкм<sup>2</sup>; изображение состоит из  $128 \times 128$  точек) (a), (c) Данные о рельефе поверхности, полученные при сканировании с холостым обратным ходом и без него, соответственно (тест объект повернут на угол  $45^\circ$  против часовой стрелки). Система компенсации гистерезиса отключена; (b), (d) Данные о рельефе поверхности, соответствующие рисункам (a), (c). Система компенсации гистерезиса включена; (e) Данные о рельефе поверхности, полученные при сканировании с холостым обратным ходом (тест объект повернут на угол  $45^\circ$  по часовой стрелки). Результат компенсации гистерезиса подобен данным, представленным на рисунке (b).

Таблица I. Классификация типов петель гистерезиса.

Таблица II. Результаты расчёта погрешностей аппроксимации.

## Список литературы

- <sup>1</sup> Е. П. Попов, Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления, Наука, Москва, 1988.
- <sup>2</sup> Е. П. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, Москва, 1960.
- <sup>3</sup> Б. Янкович, О возможности аппроксимации петли гистерезиса, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, том 4, стр. 503, Киев, 1969.
- <sup>4</sup> Р. Бу, Математическая модель гистерезиса. Приложение к колебательному контуру с насыщаемым дросселем, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, том 4, стр. 100, Киев, 1969.
- <sup>5</sup> L. E. C. van de Leemput, P. H. H. Rongen, B. H. Timmerman, H. van Kempen, Calibration and characterization of piezoelectric elements as used in scanning tunneling microscopy, Review of Scientific Instruments, volume 62, page 989, 1991.
- <sup>6</sup> S. Vieira, The behavior and calibration of some piezoelectric ceramics used in the STM, IBM Journal of Research and Development, volume 30, page 553, 1986.
- <sup>7</sup> E. P. Stoll, Restoration of STM images distorted by time-dependent piezo driver aftereffects, Ultramicroscopy, volume 42-44, page 1585, 1992.
- <sup>8</sup> E. P. Stoll, Correction of geometrical distortions in scanning tunneling and atomic force microscopes caused by piezo hysteresis and nonlinear feedback, Review of Scientific Instruments, volume 65, page 2864, 1994.
- <sup>9</sup> D. W. Pohl, Some design criteria in scanning tunneling microscopy, IBM Journal of Research and Development, volume 30, page 417, 1986.
- <sup>10</sup> O. Nishikawa, M. Tomitori, A. Minakuchi, Piezoelectric and electrostrictive ceramics for STM, Surface Science, volume 181, page 210, 1987.
- <sup>11</sup> R. C. Barrett, C. F. Quate, Optical scan-correction system applied to atomic force microscopy, Review of Scientific Instruments, volume 62, page 1393, 1991.
- <sup>12</sup> L. Libioulle, A. Ronda, M. Taborelli, J. M. Gilles, Deformation and nonlinearity in scanning tunneling microscope images, Journal of Vacuum Science and Technology B, volume 9, page 655, 1991.
- <sup>13</sup> S.-Y. Liu, I-W. Chen, Fatigue deformation mechanisms of zirconia ceramics, Journal of American Ceramic Society, volume 75, page 1191, 1992.
- <sup>14</sup> Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике для научных работников и инженеров, Наука, Москва, 1984.
- <sup>15</sup> S. Hirano, T. Yogo, K. Kikuta, Y. Araki, M. Saitoh, S. Ogasahara, Synthesis of highly oriented lead zirconate-lead titanate film using metallo-organics, Journal of American Ceramic Society, volume 75, page 2785, 1992.

<sup>16</sup> C. D. E. Lakeman, D. A. Payne, Processing effects in the sol-gel preparation of PZT dried gels, powders, and ferroelectric thin layers, Journal of American Ceramic Society, volume 75, page 3091, 1992.

<sup>17</sup> D. W. Pohl, R. Möller, "Tracking" tunneling microscopy, Review of Scientific Instruments, volume 59, page 840, 1988.

<sup>18</sup> R. V. Lapshin, O. V. Obyedkov, Fast-acting piezoactuator and digital feedback loop for scanning tunneling microscopes, Review of Scientific Instruments, volume 64, page 2883, 1993.